Statystyka wielowymiarowa
ćwiczenia 7

Zadanie 16

Wektor $[X, Y]$ ma rozkład o gęstości $f(x, y) = x + y$ dla $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

a) Oblicz $L(Y|X)$ i $E(Y|X)$

b) Porównaj wykresy $L(Y|X = x)$ i $E(Y|X = x)$ jako funkcji zmiennej x.

c) Porównaj wartości: $Var(Y)(1 - \rho^2(X, Y))$ i $Var(Y) - Var[E(Y|X)]$. Jaka jest interpretacja tych wyników?

d) Wykonaj punkty a)-c) dla wektora $[X, Y]$ o gęstości $f(x, y) = 2(x + y)$ dla $0 \leq x \leq y \leq 1$.

Zadanie 17

Wektor $[X, Y]$ ma rozkład jednostajny na obszarze $S \subset R^2$ o tej własności, że część wspólna S i każdej prostej o równaniu $x = t$ ($t = const$) jest odcinkiem o środku w punkcie (t, a_t). Pokaż, że $E(Y|X) = a_X$

Zadanie 18

Zmienna losowa X_i jest wartością zakupów i-tego klienta w pewnym sklepie. Załóżmy, że zmienne losowe X_i są niezależne, o tym samym rozkładzie z wartością oczekiwaną μ i wariancją σ^2. Niech N będzie zmienną losową o wartościach w zbiorze $\{0, 1, 2, \ldots\}$ oznaczającą liczbę klientów sklepu danego dnia. Zakładamy, że zmienna losowa N jest niezależna od wszystkich zmiennych X_i i ma wartość oczekiwaną i wariancję. Zmienna losowa $Y_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ jest dziennym utargiem sklepu. Pokaż, że:

a) $E(Y_N|N) = N\mu$

b) $E(Y_N) = E(N)\mu$

c) $Var(Y_N|N) = N\sigma^2$

d) $Var(Y_N) = E(N)\sigma^2 + Var(N)\mu^2$

Zadanie 19

Niech N oznacza wynik rzutu kością do gry, zaś Y_N liczbę orłów przy N- krotnym rzucie monetą. Oblicz $E(Y_N|N)$, $E(Y_N)$,$Var(Y_N|N)$,$Var(Y_N)$.